

# SÉRIES NUMÉRIQUES

## 1 DÉFINITIONS ET PREMIÈRES PROPRIÉTÉS

### 1.1 DÉFINITIONS

**Définition (Série numérique)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  on pose :  $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$  ( $n^{\text{ème}}$  somme partielle). La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est alors appelée la *série de terme général*  $u_n$  et notée  $\sum u_n$ .

#### 🐞 🐞 🐞 Explication

- Avec cette définition, une série n'est jamais qu'une suite. Du coup, avec les notations précédentes, dire que la série  $\sum u_n$  converge (resp. diverge) revient simplement à dire que la suite des sommes partielles  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge (resp. diverge), et la nature de la série  $\sum u_n$  est sa convergence ou divergence.
- Seulement voilà, si les séries ne sont que des suites, pourquoi faire une théorie des séries ? La théorie des suites n'est-elle pas suffisante ? La réponse est non. La grande question de la théorie des suites est : à quelle condition la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est-elle convergente ? La grande question de la théorie des séries est quant à elle : à quelle condition sur la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la série  $\sum u_n$  est-elle convergente ? Cette question appelle des résultats spécifiques qui sont l'objet du chapitre.

**Définition (Somme d'une série)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. Si la série  $\sum u_n$  converge, sa limite est notée  $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$  et appelée la *somme* de la série.

🐞 🐞 🐞 **Explication** Comme dans le cas des suites, les premiers termes d'une série n'ont pas d'influence sur sa nature (convergence ou divergence). Ils affectent en revanche la valeur de sa somme lorsqu'elle est convergente.

**Théorème (Série géométrique)** Soit  $q \in \mathbb{C}$ . La série  $\sum q^n$ , dite *série géométrique de raison  $q$* , est convergente si et seulement si  $|q| < 1$ . Dans ce cas :  $\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q}$ .

**Démonstration** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $\sum_{k=0}^n q^k = \begin{cases} \frac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 ; \\ n+1 & \text{si } q = 1. \end{cases}$  Le résultat découle de nos connaissances sur les limites des suites géométriques. ■

**Exemple** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ , qu'on appelle une *série de Riemann*, est convergente si  $\alpha \geq 2$  et divergente si  $\alpha \leq 0$ . Mais que se passe-t-il si  $\alpha \in ]0, 2[$  ? Un peu de patience...

**En effet** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , posons  $U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^\alpha}$ .

- Supposons  $\alpha \geq 2$ . La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est croissante car  $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)^\alpha} \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Pour montrer qu'elle converge, i.e. que  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  converge, il nous reste à montrer que  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est majorée. Or pour tout  $n \geq 2$  :  $U_n = 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^\alpha} \stackrel{\alpha \geq 2}{\leq} 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k^2} \leq 1 + \sum_{k=2}^n \frac{1}{k(k-1)} = 1 + \sum_{k=2}^n \left( \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \right) = 1 + \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \leq 2$ .
- Supposons  $\alpha \leq 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $U_n \stackrel{\alpha \leq 0}{\geq} \sum_{k=1}^n 1 = n$  et par ailleurs  $\lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty$ . Le théorème de minoration montre alors que  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \infty$ . Comme voulu,  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  diverge.

## 1.2 DIVERGENCE GROSSIÈRE

**Théorème (Condition nécessaire de convergence d'une série)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe.

Si  $\sum u_n$  converge, alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ .

**Démonstration** Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et faisons l'hypothèse que  $\sum u_n$  converge. Alors si  $S$  désigne la somme de cette série :  $u_n = U_n - U_{n-1} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S - S = 0$ . ■

**Définition (Divergence grossière)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe.

- On dit que la série  $\sum u_n$  *diverge grossièrement* si  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ .
- Si  $\sum u_n$  diverge grossièrement, alors  $\sum u_n$  diverge (tout court).

 **En pratique** Quand on vous demande de déterminer la nature d'une série  $\sum u_n$ , commencez tout de suite par vous demander si oui ou non  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$ . Si la réponse est non, c'est terminé :  $\sum u_n$  diverge (grossièrement). Si la réponse est oui, vous ne pouvez rien en déduire.

**××× Attention !** La réciproque de l'implication «  $\sum u_n$  converge  $\implies \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  » est fautive en général : il ne suffit pas de montrer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = 0$  pour montrer que  $\sum u_n$  converge. Croire le contraire, c'est avouer qu'on n'a absolument **RIEN** compris à la théorie des séries, car la théorie des séries n'a de pertinence qu'à partir du moment où l'on ne peut se contenter de la seule théorie des suites. En résumé : une somme infinie de quantités qui tendent vers 0 peut ne pas converger.

**Exemple** La série de Riemann  $\sum \frac{1}{n}$ , dite *série harmonique*, diverge. Et pourtant  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$ .

**En effet (Preuve n°1)** Raisonnons par l'absurde en supposant la série  $\sum \frac{1}{n}$  convergente de somme  $S$ .

$$\text{Alors : } \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} S - S = 0.$$

$$\text{Pourtant pour tout } n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{(2n) - (n+1) + 1}{2n} = \frac{1}{2}. \quad \text{Contradiction !}$$

**En effet (Preuve n°2)** La fonction  $x \mapsto \ln(1+x)$  étant concave sur  $] -1, \infty[$ , son graphe est situé sous sa tangente en 0 d'équation  $y = x$ . Il en découle que pour tout  $x \in ] -1, \infty[$  :  $\ln(1+x) \leq x$ . Du coup, pour tout

$$n \in \mathbb{N}^* : \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \geq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^n (\ln(k+1) - \ln k) = \ln(n+1). \quad \text{Or } \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty. \text{ Le théorème}$$

de minoration montre alors que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \infty$ , donc comme voulu que  $\sum \frac{1}{n}$  diverge.

## 1.3 LIEN SUITE-SÉRIE

**Théorème (Lien suite-série)** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. Alors la **suite**  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge si et seulement si la **série**  $\sum (a_{n+1} - a_n)$  converge.

**Démonstration** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , par simplification télescopique :  $\sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) = a_n - a_0$ . Il en découle que le terme de gauche possède une limite finie lorsque  $n$  tend vers  $\infty$  si et seulement si le terme de droite fait de même. ■

 **Explication** Grâce à ce théorème, on peut étudier une suite en se servant des techniques spécifiques de la théorie des séries, ou au contraire étudier une série au moyen des techniques de la théorie des suites.

**Exemple** La série  $\sum \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$  diverge.

**En effet** La suite  $(\ln n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  diverge, donc la série  $\sum (\ln(n+1) - \ln n)$  également.

## 1.4 OPÉRATIONS SUR LES SÉRIES

**Théorème (Opérations sur les séries)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites complexes.

- Pour tout  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ ,  $\sum u_n$  converge si et seulement si  $\sum (\lambda u_n)$  converge.
- Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent, alors  $\sum (u_n + v_n)$  converge.
- Si  $\sum u_n$  converge mais  $\sum v_n$  diverge, alors  $\sum (u_n + v_n)$  diverge.

**Démonstration** Rien à prouver : nous connaissons ce résultat pour les suites et justement les séries sont des suites. ■

× × × **Attention !**

- Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  divergent toutes les deux, on ne peut rien dire en général de  $\sum (u_n + v_n)$ . Par exemple  $\sum \frac{1}{n}$  diverge et  $\sum \frac{1}{n} + \sum \frac{1}{n} = \sum \frac{2}{n}$  diverge aussi, mais  $\sum \frac{1}{n} - \sum \frac{1}{n} = 0$  converge.
- Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent, on ne peut rien dire en général de  $\sum u_n v_n$ . Nous verrons plus tard que  $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  converge, mais  $\sum \left( \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \times \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \right) = \sum \frac{1}{n}$  diverge.

## 2 SÉRIES NUMÉRIQUES À TERMES POSITIFS

On étudie à présent les séries dont le terme général est positif — sous-entendu : ou nul. Ce qui est vrai de ces séries serait en fait vrai des séries dont le terme général est négatif (ou nul). L'essentiel est donc, dans cette section, que le signe du terme général soit constant.

× × × **Attention !** Quand vous utilisez l'un des théorèmes de cette section, n'oubliez surtout pas de vérifier et mentionner la positivité des suites étudiées. Hypothèse importante !

### 2.1 THÉORÈME FONDAMENTAL DES SÉRIES À TERMES POSITIFS

**Théorème (Théorème fondamental des séries à termes positifs)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle positive. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$ .

- La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante et possède donc une limite.
- La série  $\sum u_n$  converge si et seulement si la suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée.

**Démonstration** La suite  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante car  $U_{n+1} - U_n = u_{n+1} \geq 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Le reste n'est qu'une réécriture du théorème de la limite monotone dans le cas croissant. ■

⚡ ⚡ ⚡ **Explication** Quand on étudie une série à termes positifs, ce théorème ramène tout problème de convergence à un problème de majoration. La question n'est pas dans ce cas : « La limite existe-t-elle ? » mais : « Est-elle finie ? ».

## 2.2 CRITÈRE DE CONDENSATION

**Théorème (Critère de condensation)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle positive décroissante. Alors  $\sum u_n$  et  $\sum 2^n u_{2^n}$  ont même nature.

**Démonstration** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$\sum_{k=1}^{2^n-1} u_k = \overbrace{(u_1)}^{1 \text{ terme}} + \overbrace{(u_2 + u_3)}^{2 \text{ termes}} + \overbrace{(u_4 + u_5 + u_6 + u_7)}^{4 \text{ termes}} + \overbrace{(u_8 + \dots + u_{15})}^{8 \text{ termes}} + \dots + \overbrace{(u_{2^{n-1}} + \dots + u_{2^n-1})}^{2^{n-1} \text{ termes}} = \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{2^k-1} u_{2^k+i}.$$

Or  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante donc  $u_{2^k+2^k} \leq u_{2^k+i} \leq u_{2^k}$  pour tous  $k \in \mathbb{N}$  et  $i \in \llbracket 0, 2^k - 1 \rrbracket$ .

Du coup  $\sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{2^k-1} u_{2^k+i} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{2^k-1} u_{2^k+i} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{2^k-1} u_{2^k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , et donc :

$$\underline{\underline{\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n 2^k u_{2^k}}} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_{2^k+1} = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_{2^k+2^k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{2^k-1} u_{2^k+i} = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{2^n-1} u_k}} \leq \sum_{k=0}^{n-1} \sum_{i=0}^{2^k-1} u_{2^k} = \underline{\underline{\sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_{2^k}}}.$$

Les séries  $\sum u_n$  et  $\sum 2^n u_{2^n}$  sont à termes positifs, donc en vertu du théorème fondamental, elles convergent si et seulement si elles sont majorées.

- Si la série  $\sum u_n$  est majorée, disons par  $M$ , alors  $\sum_{k=1}^n 2^k u_{2^k} \leq 2 \sum_{k=1}^{2^n-1} u_k \leq 2M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , donc  $\sum 2^n u_{2^n}$  est majorée.

- Si la série  $\sum 2^n u_{2^n}$  est majorée, disons par  $M'$ , alors  $\sum_{k=1}^n u_k \leq 2^{n-1} \sum_{k=1}^{2^n-1} u_k \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2^k u_{2^k}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , donc  $\sum u_n$  est majorée.

Les séries  $\sum u_n$  et  $\sum 2^n u_{2^n}$  sont finalement bien de même nature. ■

🐞 🐞 🐞 **Explication** La preuve précédente repose sur l'idée que pour sommer tous les  $u_n$ ,  $n$  décrivant  $\mathbb{N}^*$ , on peut les sommer de manière *condensée* par paquets de tailles 1, 2, 4, 8, ... Il se trouve alors, grâce à l'hypothèse de décroissance, que le paquet «  $u_{2^n} + u_{2^n+1} + u_{2^n+2} + \dots + u_{2^{n+1}-1}$  » de  $2^n$  termes compte autant que la quantité «  $2^n u_{2^n}$  ».

**Théorème (Série de Riemann)** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ , qu'on appelle une *série de Riemann*, converge si et seulement si  $\alpha > 1$ .

**Démonstration** Nous avons déjà traité le cas  $\alpha \leq 0$ . Supposons donc  $\alpha > 0$ . La suite  $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est alors positive et décroissante. En vertu du critère de condensation, les séries  $\sum \frac{1}{n^\alpha}$  et  $\sum \frac{2^n}{(2^n)^\alpha} = \sum (2^{1-\alpha})^n$  ont donc même nature. Or la série  $\sum (2^{1-\alpha})^n$  est géométrique et converge si et seulement si  $|2^{1-\alpha}| < 1$ , i.e.  $\alpha > 1$ . C'est le résultat voulu. ■

## 2.3 COMPARAISON AU MOYEN D'INÉGALITÉS

**Théorème (Comparaison au moyen d'inégalités)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles positives. On suppose  $u_n \leq v_n$  à partir d'un certain rang.

- (i) Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge aussi.
- (ii) Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge aussi.

**Démonstration** Notons  $N$  un rang à partir duquel  $u_n \leq v_n$  et posons :  $U_n = \sum_{k=0}^n u_k$  et  $V_n = \sum_{k=0}^n v_k$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Alors pour tout  $n \geq N$  :  $U_n - U_N = \sum_{k=N+1}^n u_k \leq \sum_{k=N+1}^n v_k = V_n - V_N$  (inégalité ★).

- (i) On suppose  $\sum v_n$  convergente. Alors  $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée donc  $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aussi en vertu d'★. Comme voulu  $\sum u_n$  converge.
- (ii) On suppose  $\sum u_n$  divergente. Alors  $\lim_{n \rightarrow \infty} U_n = \infty$  donc  $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \infty$  en vertu d'★ et du théorème de minoration. Comme voulu  $\sum v_n$  diverge. ■

**Exemple** La série  $\sum \frac{1}{n^2(2 + \sin n)}$  est convergente.

**En effet** Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $0 \leq \frac{1}{n^2(2 + \sin n)} \leq \frac{1}{n^2}$ . En particulier  $\sum \frac{1}{n^2(2 + \sin n)}$  est une série à termes positifs et comme nous savons que  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge, il en est de même de cette série.

## 2.4 COMPARAISON AU MOYEN DE GRANDS $O$ OU PETITS $o$

**Théorème (Comparaison au moyen de grands  $O$  ou petits  $o$ )** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles positives. On suppose  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$  — ou bien que  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} o(v_n)$ , mais dans ce cas on a aussi la relation « grand  $O$  ».

- (i) Si  $\sum v_n$  converge, alors  $\sum u_n$  converge aussi.
- (ii) Si  $\sum u_n$  diverge, alors  $\sum v_n$  diverge aussi.

**Démonstration** Puisque  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{=} O(v_n)$ , il existe un rang  $N$  et un réel  $K > 0$  tels que pour tout  $n \geq N$  :  $|u_n| \leq K|v_n|$ , i.e. ici  $u_n \leq K v_n$ . Utiliser ensuite le théorème de comparaison au moyen d'inégalités. ■

**Exemple** La série  $\sum \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{\cos n}}{n^3 - n}$  converge.

**En effet** Pour commencer la suite  $\left( \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{\cos n}}{n^3 - n} \right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est positive. Par ailleurs  $\frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{\cos n}}{n^3 - n} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{e^{\cos n}}{n^{\frac{5}{2}}}$ , donc  $\frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{\cos n}}{n^3 - n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ . Comme la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge ( $2 > 1$ ), cela montre bien que  $\sum \frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor e^{\cos n}}{n^3 - n}$  converge aussi.

**Théorème (Série de Bertrand)** Soient  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$ , qu'on appelle une *série de Bertrand*, converge si et seulement si :

- soit  $\alpha > 1$  ;
- soit  $\alpha = 1$  et  $\beta > 1$ .

**Démonstration**

- Si  $\alpha > 1$ , posons  $\gamma = \frac{\alpha + 1}{2} > 1$ . Alors  $\frac{n^\gamma}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln n)^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  car  $\frac{\alpha-1}{2} > 0$ . Ainsi  $\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta} \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\gamma}\right)$ . Or la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\gamma}$  converge car  $\gamma > 1$ . Par ailleurs la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  est à termes positifs. Cette série est donc convergente par comparaison.
- Si  $\alpha < 1$ , posons  $\gamma = \frac{\alpha + 1}{2} < 1$ . Alors  $\frac{n^\gamma}{n^\alpha (\ln n)^\beta} = \frac{1}{n^{\frac{\alpha-1}{2}} (\ln n)^\beta} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$  car  $\frac{\alpha-1}{2} < 0$ . Ainsi  $\frac{1}{n^\gamma} \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}\right)$ . Or la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^\gamma}$  diverge car  $\gamma < 1$ . Par ailleurs la série  $\sum \frac{1}{n^\alpha (\ln n)^\beta}$  est à termes positifs. Cette série est donc divergente par comparaison.
- Si  $\alpha = 1$  et  $\beta < 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n (\ln n)^\beta}{n} = 0$  donc  $\frac{1}{n} \underset{n \rightarrow \infty}{=} O\left(\frac{1}{n (\ln n)^\beta}\right)$ . Or la série harmonique  $\sum \frac{1}{n}$  diverge et  $\sum \frac{1}{n (\ln n)^\beta}$  est à termes positifs, donc cette série diverge.

- Supposons enfin que  $\alpha = 1$  et  $\beta \geq 0$ . Dans ces conditions la suite  $\left(\frac{1}{n(\ln n)^\beta}\right)_{n \geq 2}$  est positive et décroissante. Le critère de condensation nous permet d'en déduire que les séries  $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$  et  $\sum \frac{2^n}{2^n (\ln(2^n))^\beta}$  ont même nature. En d'autres termes, les séries  $\sum \frac{1}{n(\ln n)^\beta}$  et  $\sum \frac{1}{n^\beta}$  ont même nature. Nous savons qu'elles convergent si et seulement si  $\beta > 1$ . C'est justement le résultat souhaité.

## 2.5 COMPARAISON AU MOYEN D'ÉQUIVALENTS

**Théorème (Comparaison au moyen d'équivalents)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites réelles positives. On suppose  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ . Alors  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  ont même nature.

**Démonstration** Puisque  $u_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} v_n$ , on a aussi  $u_n = O(v_n)$  et  $v_n = O(u_n)$ . Utiliser alors le théorème de comparaison au moyen de grands  $O$ . ■

**Exemple** La série  $\sum \frac{1}{n^2(n + \sqrt{n})}$  converge.

**En effet** Cette série est à termes positifs et  $\frac{1}{n^2(n + \sqrt{n})} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$ . Comme la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^3}$  converge ( $3 > 1$ ), c'est aussi le cas de  $\sum \frac{1}{n^2(n + \sqrt{n})}$ .

**Exemple** Il existe un réel  $\gamma$ , appelé la *constante d'Euler*, tel que :  $\sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \ln n + \gamma + o(1)$ .

**En effet** Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :  $a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n$ . Nous souhaitons prouver que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge. En vertu du lien suite-série, il nous suffit pour cela de montrer que la série  $\sum (a_{n+1} - a_n)$  converge. C'est ce que nous allons faire. Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  :

$$a_{n+1} - a_n = \left( \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k} - \ln(n+1) \right) - \left( \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln n \right) = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \ln \left( 1 - \frac{1}{n+1} \right) - \left( -\frac{1}{n+1} \right)$$

$$\underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2(n+1)^2} \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{1}{2n^2}.$$

Ceci prouve pour commencer que la série  $\sum (a_{n+1} - a_n)$  est à termes négatifs à partir d'un certain rang — en fait dès le rang 1. Mais par ailleurs la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge ( $2 > 1$ ) donc par comparaison  $\sum (a_{n+1} - a_n)$  aussi. Comme voulu  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  converge, et si nous notons  $\gamma$  sa limite c'est terminé.

## 3 CONVERGENCE ABSOLUE ET SÉRIES ALTERNÉES

### 3.1 CONVERGENCE ABSOLUE

**Définition (Convergence absolue)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. On dit que la série  $\sum u_n$  est *absolument convergente* ou qu'elle *converge absolument* si la série  $\sum |u_n|$  converge.

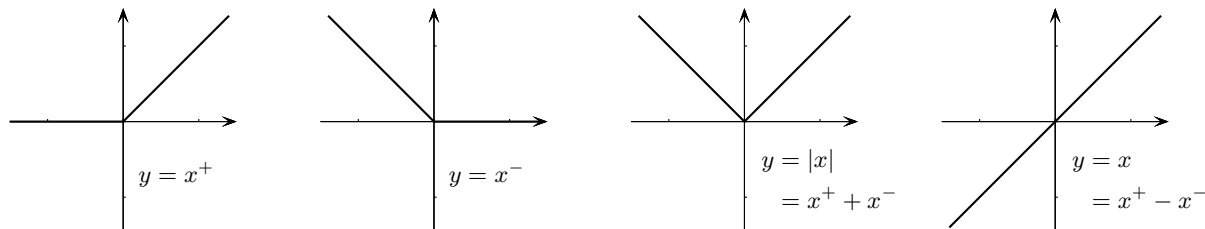
**Exemple** La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^2}$  est absolument convergente car la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge ( $2 > 1$ ).

Bien sûr, tout le monde s'interroge : une série absolument convergente est-elle convergente ? La réponse est oui. Pour le prouver, introduisons quelques notations.

**Définition (Parties positive et négative d'un réel)** Soit  $x \in \mathbb{R}$ .

- On pose  $x^+ = \max\{x, 0\}$  et  $x^- = \max\{-x, 0\}$ . Le réel  $x^+$  est appelé la *partie positive* de  $x$  et  $x^-$  est appelé sa *partie négative*.
- $|x| = x^+ + x^-$  et  $x = x^+ - x^-$ .

🐞🐞🐞 **Explication** Les graphes suivants illustrent cette définition. Notez bien que la partie négative d'un réel est... positive!



**Théorème (La convergence absolue implique la convergence)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. Si  $\sum u_n$  converge absolument, elle converge (tout court).

🔗🔗🔗 **En pratique** Ce théorème ramène dans de nombreux cas l'étude de la nature d'une série quelconque à l'étude de la nature d'une série à termes positifs — pour laquelle nous avons tout un tas de théorèmes de comparaison. Quand vous étudiez la nature d'une série quelconque, commencez donc par vous demander si elle converge absolument.

**Démonstration** Traitons d'abord le cas des suites réelles ; le cas des suites complexes en général en découlera.

- Supposons d'abord que  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle et que  $\sum |u_n|$  converge. Comme  $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$  et  $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le théorème de comparaison au moyen d'inégalités montre que  $\sum u_n^+$  et  $\sum u_n^-$  convergent toutes les deux. Par différence,  $\sum u_n = \sum (u_n^+ - u_n^-)$  converge comme voulu.
- Cas général :  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est à présent une suite complexe et  $\sum |u_n|$  converge. Comme  $0 \leq |\operatorname{Re}(u_n)| \leq |u_n|$  et  $0 \leq |\operatorname{Im}(u_n)| \leq |u_n|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le théorème de comparaison au moyen d'inégalités montre que  $\sum |\operatorname{Re}(u_n)|$  et  $\sum |\operatorname{Im}(u_n)|$  convergent toutes les deux. A fortiori, en vertu du premier point,  $\sum \operatorname{Re}(u_n)$  et  $\sum \operatorname{Im}(u_n)$  convergent également. Par somme enfin,  $\sum u_n = \sum (\operatorname{Re}(u_n) + i \operatorname{Im}(u_n))$  converge. ■

✖✖✖ **Attention !** La réciproque du théorème précédent est **FAUSSE** ! Une série peut converger sans être absolument convergente. Nous verrons des exemples de telles séries dans le paragraphe sur les séries alternées. En attendant, nous pouvons au moins donner une définition.

**Exemple** La série  $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^2 + 1}$  converge.

**En effet** Pour obtenir cette convergence, il nous suffit d'établir la convergence absolue de  $\sum \frac{(-1)^{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}}{n^2 + 1}$ , i.e. la convergence (tout court) de  $\sum \frac{1}{n^2 + 1}$ . Or cette série à termes positifs est convergente car  $\frac{1}{n^2 + 1} \leq \frac{1}{n^2}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et car la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^2}$  converge ( $2 > 1$ ).

**Définition (Semi-convergence)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. On dit que la série  $\sum u_n$  est *semi-convergente* si elle est convergente mais pas absolument convergente.

## 3.2 RÈGLE DE D'ALEMBERT

**Théorème (Règle de d'Alembert)** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite complexe. On suppose  $u_n \neq 0$  à partir d'un certain rang.

- (i) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < 1$ , la série  $\sum u_n$  converge absolument, donc converge (tout court).
- (ii) Si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > 1$ , la série  $\sum u_n$  diverge grossièrement, donc diverge (tout court).

**✕ ✕ ✕ Attention !** Rien ne garantit en général que la limite  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$  existe. Par ailleurs la règle de d'Alembert ne nous dit **RIEN** si  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = 1$ . Ce cas limite est appelé souvent le *cas douteux* de la règle de d'Alembert.

**Démonstration** Supposant que  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$  existe, notons  $\ell$  cette limite. La preuve qui suit consiste à comparer la série  $\sum u_n$  à une série géométrique — dont nous maîtrisons parfaitement la nature.

- (i) Supposons d'abord  $\ell < 1$  et posons  $\varepsilon = \frac{1-\ell}{2}$ . Alors  $\varepsilon > 0$  et  $0 \leq \ell + \varepsilon < 1$ . Par définition de  $\ell$ , il existe donc un rang  $N$  à partir duquel  $u_n \neq 0$  et  $0 \leq \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| < \ell + \varepsilon$ . Dans ces conditions, pour tout  $n \geq N+1$  :

$$\left| \frac{u_n}{u_N} \right| = \prod_{k=N}^{n-1} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \leq (\ell + \varepsilon)^{n-N}, \quad \text{donc } 0 \leq |u_n| \leq K(\ell + \varepsilon)^n \text{ où } K = \frac{|u_N|}{(\ell + \varepsilon)^N} \text{ ne dépend pas de } n.$$

Conclusion :  $|u_n| \underset{n \rightarrow \infty}{=} O((\ell + \varepsilon)^n)$ . Or la série géométrique  $\sum (\ell + \varepsilon)^n$  converge car  $0 \leq \ell + \varepsilon < 1$ , donc la série à termes positifs  $\sum |u_n|$  aussi par comparaison. Comme voulu,  $\sum u_n$  converge absolument.

- (ii) Supposons maintenant  $\ell > 1$  et posons  $\varepsilon = \frac{\ell-1}{2}$ . Alors  $\varepsilon > 0$  et  $\ell - \varepsilon > 1$ . Par définition de  $\ell$ , il existe donc un rang  $N$  à partir duquel  $u_n \neq 0$  et  $\left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| > \ell - \varepsilon$ . Dans ces conditions, pour tout  $n \geq N+1$  :

$$\left| \frac{u_n}{u_N} \right| = \prod_{k=N}^{n-1} \left| \frac{u_{k+1}}{u_k} \right| \geq (\ell - \varepsilon)^{n-N}, \quad \text{donc } |u_n| \geq K(\ell - \varepsilon)^n \text{ où } K = \frac{|u_N|}{(\ell - \varepsilon)^N} \text{ ne dépend pas de } n.$$

Comme  $\ell - \varepsilon > 1$ , le théorème de minoration montre que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |u_n| = \infty$ . En particulier  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n \neq 0$ , donc  $\sum u_n$  diverge grossièrement. ■

 **En pratique** Le calcul de  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right|$  est plus facile à faire si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est définie à l'aide de produits et de quotients. On peut notamment espérer des simplifications au numérateur et au dénominateur dans ce cas.

**Exemple** La série  $\sum \frac{n^4}{3^n}$  converge car :  $\left| \frac{\frac{(n+1)^4}{3^{n+1}}}{\frac{n^4}{3^n}} \right| = \frac{1}{3} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^4 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \text{ et } \frac{1}{3} < 1.$

**Exemple** La série  $\sum \frac{z^n}{n!}$  converge pour tout  $z \in \mathbb{C}$ . On définit généralement la fonction exponentielle comme la somme de cette série, de sorte que pour tout  $z \in \mathbb{C}$  :  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ . Nous comprendrons mieux la raison de cela à la fin du chapitre.

Remarquez bien que nous sommes ici en train de parler d'une définition de l'exponentielle **sur  $\mathbb{C}$**  — définition unique ! Quand nous avons défini l'exponentielle complexe en début d'année, notre définition supposait connues l'exponentielle réelle et les fonctions sinus et cosinus, via la formule :  $\forall z \in \mathbb{C}, e^z = e^{\operatorname{Re}(z)} (\cos \operatorname{Im}(z) + i \sin \operatorname{Im}(z))$ . Au contraire, quand on définit l'exponentielle complexe comme la somme d'une série, ce sont l'exponentielle réelle et les fonctions sinus et cosinus qui s'en déduisent.

**En effet** Soit  $z \in \mathbb{C}$ . Si  $z = 0$ , la convergence de  $\sum \frac{z^n}{n!}$  est évidente. Supposons donc  $z \neq 0$ . Alors :

$$\left| \frac{\frac{z^{n+1}}{(n+1)!}}{\frac{z^n}{n!}} \right| = \frac{|z|}{n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \text{ La règle de d'Alembert montre que } \sum \frac{z^n}{n!} \text{ converge absolument, donc converge.}$$



### 3.3 SÉRIES ALTERNÉES

**Définition (Séries alternées)** On appelle *série alternée* toute série  $\sum (-1)^n a_n$  où  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite réelle positive.

**Exemple** Les séries  $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ ,  $\sum \frac{(-1)^n e^{-n}}{n^2 + 1}$  et  $\sum \frac{(-1)^n n^2}{1 + n^2 \sqrt{n}}$  sont alternées.

**Théorème (Théorème des séries alternées)** Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle positive décroissante de limite nulle. Alors la série alternée  $\sum (-1)^n a_n$  converge.

\*\*\* **Attention !** L'hypothèse de décroissance n'est pas là pour décorer !

**Démonstration** Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $S_n = \sum_{k=0}^n (-1)^k a_k$ . Nous allons montrer que les suites  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  sont adjacentes. Cela montrera qu'elles sont convergentes de même limite en vertu du théorème des suites extraites, et donc que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge d'après le théorème des suites extraites. Comme voulu on aura prouvé la convergence de  $\sum (-1)^n a_n$ .

Par hypothèse :  $S_{2n+1} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} = -a_{2n+1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ . Ensuite la suite  $(S_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante car pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $S_{2(n+1)} - S_{2n} = (-1)^{2n+1} a_{2n+1} + (-1)^{2n+2} a_{2n+2} = a_{2n+2} - a_{2n+1} \leq 0$ , la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  étant décroissante. Pour une raison analogue la suite  $(S_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante. ■

**Théorème (Série de Riemann alternée)** Soit  $\alpha \in \mathbb{R}$ . La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$ , qu'on appelle une *série de Riemann alternée*, converge si et seulement si  $\alpha > 0$ .

🐼 🐼 🐼 **Explication** Pour  $\alpha \in ]0, 1]$ , la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  est semi-convergente : elle converge, mais pas absolument.

**Démonstration** Si  $\alpha \leq 0$ , la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  diverge (grossièrement). Si au contraire  $\alpha > 0$ , la suite positive  $\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  est décroissante de limite nulle, donc  $\sum \frac{(-1)^n}{n^\alpha}$  converge d'après le théorème des séries alternées. ■

👉 👉 👉 **En pratique** Il ne faut pas toujours vouloir à tout prix appliquer le théorème des séries alternées directement. Un mélange de techniques est souvent préférable. Étudiez attentivement l'exemple qui suit.

**Exemple** La série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(n\sqrt{2})}$  converge.

**En effet** La monotonie de la suite positive  $\left(\frac{1}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(n\sqrt{2})}\right)_{n \in \mathbb{N}^*}$  ne semble pas simple à étudier. Le théorème des séries alternées ne nous sera donc pas utile directement. Commençons par effectuer un développement limité — on rappelle que  $\frac{1}{1+u} \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 - u + o(u) \underset{u \rightarrow 0}{=} 1 + O(u)$ .

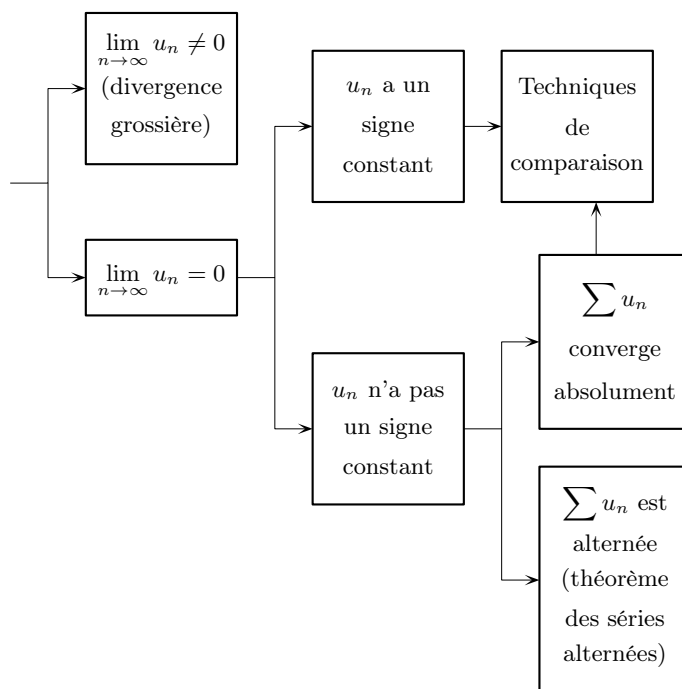
$$\frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(n\sqrt{2})} = \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} \times \frac{1}{1 + \frac{\sin(n\sqrt{2})}{n^{\frac{1}{2}}}} \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} \left[ 1 + O\left(\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}\right) \right] \underset{n \rightarrow \infty}{=} \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}} + O\left(\frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}\right).$$

Intérêt de cette méthode à base de développement limité : le problème initial compliqué est décomposé en sous-problèmes élémentaires. La série de Riemann alternée  $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}}}$  converge car  $\frac{3}{4} > 0$ , et la série de Riemann  $\sum \frac{1}{n^{\frac{5}{4}}}$  aussi car  $\frac{5}{4} > 1$ , donc par somme, grâce au théorème de comparaison au moyen de grands  $O$  et au fait que la convergence absolue implique la convergence (tout court), la série  $\sum \frac{(-1)^n}{n^{\frac{3}{4}} + n^{\frac{1}{4}} \sin(n\sqrt{2})}$  converge.

## 4 RÉCAPITULATIF DES PREUVES DE CONVERGENCE

### En pratique

Le schéma ci-dessous rassemble et ordonne les résultats de convergence établis dans ce chapitre. Comme souvent en mathématiques, les méthodes qui en sont issues **ne permettent pas de conclure dans tous les cas**. Il n'en demeure pas moins que ce schéma mérite un sérieux coup d'œil.



## 5 PRODUIT DE CAUCHY

**Définition (Produit de Cauchy)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites complexes. On appelle *produit de Cauchy des séries*  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  la série de terme général  $\sum_{\substack{0 \leq p, q \leq n \\ p+q=n}} u_p v_q = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ .

**Théorème (Convergence absolue d'un produit de Cauchy)** Soient  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites complexes. On pose, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $p_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ .

Si  $\sum u_n$  et  $\sum v_n$  convergent **absolument**, alors  $\sum p_n$  également et de plus :  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \times \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ .

**Démonstration** Posons  $U = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ,  $V = \sum_{n=0}^{\infty} v_n$ ,  $\hat{U} = \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$  et  $\hat{V} = \sum_{n=0}^{\infty} |v_n|$ .

- Commençons par prouver la convergence absolue de  $\sum p_n$ . La série  $\sum |p_n|$  étant à termes positifs, il nous suffit de montrer qu'elle est majorée, ce qui résulte du calcul suivant. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n |p_k| &= \sum_{k=0}^n \left| \sum_{i=0}^k u_i v_{k-i} \right| \stackrel{\text{Inégalité triangulaire}}{\leq} \sum_{k=0}^n \sum_{i=0}^k |u_i| |v_{k-i}| \stackrel{\text{Interversion des sommes}}{=} \sum_{i=0}^n \sum_{k=i}^n |u_i| |v_{k-i}| \\ &= \sum_{i=0}^n \left( |u_i| \sum_{k=i}^n |v_{k-i}| \right) \stackrel{j=k-i}{=} \sum_{i=0}^n \left( |u_i| \sum_{j=0}^{n-i} |v_j| \right) \leq \sum_{i=0}^n |u_i| \hat{V} \leq \hat{U} \hat{V}. \end{aligned}$$

Si nous posons  $\hat{p}_n = \sum_{k=0}^n |u_k| |v_{n-k}|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous venons d'établir au passage que  $\sum_{k=0}^n \hat{p}_k \leq \hat{U} \hat{V}$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , donc que la série à termes positifs  $\sum \hat{p}_n$  converge. Posant  $\hat{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{p}_n$ , on a :  $\hat{P} \leq \hat{U} \hat{V}$ .

- Prouvons à présent qu'en fait  $\hat{P} = \hat{U}\hat{V}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\sum_{i=0}^n |u_i| \times \sum_{j=0}^n |v_j| = \sum_{0 \leq i, j \leq n} |u_i| |v_j| \leq \sum_{\substack{0 \leq k \leq 2n \\ 0 \leq i, j \leq 2n \\ i+j=k}} |u_i| |v_j| = \sum_{k=0}^{2n} \sum_{i=0}^k |u_i| |v_{k-i}| = \sum_{k=0}^{2n} \hat{p}_k.$$

Pour la majoration centrale, remarquez simplement qu'on somme des réels positifs et que la somme de droite contient tous les termes de la somme de gauche. Faisant tendre  $n$  vers  $\infty$ , nous obtenons l'inégalité  $\hat{U}\hat{V} \leq \hat{P}$ , et donc l'égalité souhaitée.

- Calculons enfin la somme  $P = \sum_{n=0}^{\infty} p_n$ . Nous voulons montrer que  $P = UV$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=0}^n u_i \times \sum_{j=0}^n v_j - \sum_{k=0}^n p_k \right| &= \left| \sum_{0 \leq i, j \leq n} u_i v_j - \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq i, j \leq n \\ i+j=k}} u_i v_j \right| = \left| \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ n+1 \leq i+j \leq 2n}} u_i v_j \right| \\ &\leq \sum_{\substack{0 \leq i, j \leq n \\ n+1 \leq i+j \leq 2n}} |u_i| |v_j| = \sum_{0 \leq i, j \leq n} |u_i| |v_j| - \sum_{\substack{0 \leq k \leq n \\ 0 \leq i, j \leq n \\ i+j=k}} |u_i| |v_j| = \sum_{i=0}^n |u_i| \times \sum_{j=0}^n |v_j| - \sum_{k=0}^n \hat{p}_k. \end{aligned}$$

Comme le terme extrême à droite tend vers  $\hat{U}\hat{V} - \hat{P} = 0$  lorsque  $n$  tend vers  $\infty$ , le théorème des gendarmes montre que le terme extrême à gauche tend lui aussi vers 0. Mais il tend aussi vers  $UV - P$ . Comme voulu  $P = UV$ . ■

\*\*\* **Attention** ! Malheur à vous si vous oubliez l'hypothèse de convergence **absolue** ! On peut montrer que le résultat est faux en général sans cette hypothèse. Posons par exemple  $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ . Comme nous l'avons vu, la série  $\sum u_n$  est semi-convergente. Que dire alors de son produit de Cauchy par elle-même ? Pour tout  $n \geq 2$  :

$$\left| \sum_{k=1}^{n-1} u_k u_{n-k} \right| = \left| \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \times \frac{(-1)^{n-k}}{\sqrt{n-k}} \right| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \stackrel{k(n-k) \leq n^2}{\geq} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{n} = \frac{n-1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1.$$

Ce calcul montre que le produit de Cauchy de  $\sum u_n$  par elle-même diverge (grossièrement).

**Exemple** Pour tous  $z, z' \in \mathbb{C}$  :  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z+z')^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z'^n}{n!}$ . Ce résultat justifie qu'on définisse l'exponentielle au moyen de la formule «  $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$  », car il s'écrit dans ces conditions :  $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$ .

**En effet** Soient  $z, z' \in \mathbb{C}$ . Posons, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :  $p_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \times \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!}$ . Nous avons déjà vu que les séries  $\sum \frac{z^n}{n!}$  et  $\sum \frac{z'^n}{n!}$  convergent absolument. Le théorème précédent montre dans ces conditions que  $\sum p_n$  converge et que  $\sum_{n=0}^{\infty} p_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \times \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z'^n}{n!}$ . Mais que vaut  $p_n$  ? Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  :

$$p_n = \sum_{k=0}^n \frac{z^k}{k!} \times \frac{z'^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} z^k z'^{n-k} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} z^k z'^{n-k} = \frac{(z+z')^n}{n!}.$$